

Apéndice A: Observables, álgebras, estado y representaciones

Este apéndice matemático más formal presenta justificaciones para la existencia de la matriz densidad en mecánica cuántica. Para establecer esta construcción, partimos del hecho que en cada sistema físico existirán propiedades que pueden ser medidas, y para extraer la información de esta medidas utilizaremos aparatos que permiten leer estas cantidades. Matemáticamente expresaremos esta idea mediante la noción de un operador, el cual no es más que un objeto matemático que aplicado sobre otro objeto entrega un valor. A estos operadores, que entregan información sobre medidas físicas, los llamaremos observables. A continuación, describiremos propiedades de estos observables y las estructuras matemáticas que surgen a partir de ellos.

1 Álgebra y observables

En primera instancia, si tenemos un observable A que se mide en ciertas unidades, es posible reescalar ese observable multiplicando o dividiendo por un número para medir en otras unidades. Así, si medimos A , también es válido tener un observador del tipo $2A$ o cualquier otro número. Por tanto, el conjunto de observables debería poder multiplicarse por números reales. Para fenómenos cuánticos que involucran fases, interferencias o combinaciones lineales más generales, resulta conveniente extender los escalares a los números complejos, permitiendo multiplicar los observables por cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$. Esta extensión simplemente facilita la formulación matemática de la teoría.

Al mismo tiempo, pensemos en un sistema al que queremos medir su energía cinética K y su energía potencial V . La energía total es la suma de ambas, y a la vez también sería un observable, pues si medimos las energías por separado, también es posible medir el total. Entonces, el conjunto de observables debería poder sumarse entre ellos y seguir siendo un observable.

Esto permite definir la primera estructura matemática para el conjunto de observables:

Definición 1. (*Espacio Vectorial*) Un espacio vectorial es un conjunto no vacío $\mathfrak{V}$, cuyos elementos se denominan vectores, y que tiene definidas dos operaciones:

Una suma, $+: \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{V}$ y un producto por un elemento que llamaremos escalar, $\cdot: \mathbb{C} \times \mathfrak{V} \rightarrow \mathfrak{V}$, tal que para todo $u, v, w \in \mathfrak{V}$ y $\lambda, \eta \in \mathbb{C}$, los que llamamos escalares, se satisface que:

1. (*Clausura bajo suma*) $u + v \in \mathfrak{V}$
2. (*Conmutatividad de la suma*) $u + v = v + u$
3. (*Asociatividad de la suma*) $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. (*Elemento neutro de la suma*) Existe un elemento $0 \in \mathfrak{V}$ tal que $u + 0 = u$ para todo $u \in \mathfrak{V}$
5. (*Inverso aditivo de la suma*) Para todo $u \in \mathfrak{V}$ existe un $v \in \mathfrak{V}$ tal que $u + v = 0$
6. (*Clausura multiplicativa*) $\lambda \cdot v \in \mathfrak{V}$
7. (*Distributividad sobre la suma de escalares*) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
8. (*Distributividad sobre la suma de vectores*) $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
9. (*Asociatividad de la multiplicación*) $(\lambda \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
10. (*Elemento neutro de la multiplicación*) $1 \cdot v = v$ para todo $u \in \mathfrak{V}$

Ahora, es posible que midamos un observable, y a continuación midamos otro. En esa misma línea, es posible buscar una sucesión de mediciones de distintos, o incluso el mismo, observable. Esto introduce una especie de multiplicación entre operadores, tal que este producto de dos observables debe ser también un observable. Con ello, definimos una segunda estructura matemática:

Definición 2. (*Álgebra*) Un álgebra sobre $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial $\mathfrak{A}$ sobre $\mathbb{C}$ equipado con una operación binaria $\cdot: \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, tal que para todo $A, B, C \in \mathfrak{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene que:

1. (Clausura) $A \cdot B \in \mathfrak{A}$
2. (Distributividad por la derecha) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
3. (Distributividad por la izquierda) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
4. (Linealidad) $A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B = \lambda(A \cdot B)$

Será importante aquí definir la existencia de un elemento unidad o identidad en el álgebra de observables. Esta unidad simplemente representa una medición que no hace nada al aplicarla después de otra y será importante en cálculos. Así, llamaremos $\mathbb{I}$ al operador tal que para todo $A \in \mathfrak{A}$, $A \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I} \cdot A = A$. La existencia de este objeto define un álgebra unital.

Por otro lado, para ser consistentes con medidas secuenciales, como medir primero con C , luego con B y luego con A , debería ser igual a medir primero con C y luego con $A \cdot B$. Por tanto, pediremos que se satisfaga para todo $A, B, C \in \mathfrak{A}$ que $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$. Esta propiedad asociativa define un álgebra asociativa.

En la mecánica clásica se satisface que el álgebra de observables es conmutativa, es decir, podemos medir un observable y luego otro, y el resultado no cambiará si lo hacemos en sentido inverso. Matemáticamente, eso quiere decir que para todo $A, B \in \mathfrak{A}$ se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$. Sin embargo, eso no necesariamente es cierto en mecánica cuántica. En este punto, por tanto, trabajaremos sólo en un álgebra unital asociativa no conmutativa.

Una forma de medir esta no conmutatividad la presenta el concepto del conmutador:

Definición 3. (Conmutador) El conmutador de dos observables $A, B \in \mathfrak{A}$ se define como la operación binaria $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$.

Tendremos esta definición en consideración para su uso más adelante.

Adicionalmente, cuando medimos algo, el resultado de la medición debe ser una cantidad real. Con eso en mente, buscando generalizar la noción de una cantidad real para nuestros observables definiremos:

Definición 4. (Involución) Una involución es una aplicación $*$: $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, $A \mapsto A^*$ que cumple para todo $A, B \in \mathfrak{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$:

1. $(A^*)^* = A$
2. (Antilineal) $(\lambda A + B)^* = \bar{\lambda} A^* + B^*$
3. (Antimultiplicativa) $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$

Notacionalmente usamos aquí la conjugación con la barra encima de un número complejo mientras que reservamos el asterisco para la involución de un operador.

La existencia de esta operación de involución permite definir lo que es un elemento autoadjunto.

Definición 5. (Elemento autoadjunto) Un elemento $A \in \mathfrak{A}$ se llama autoadjunto si $A^* = A$

Notemos que esto es en un sentido una generalización de un número real y su relación con los complejos, pues un real es tal que es igual a su complejo conjugado. Por tanto, diremos que los observables serán todos los elementos autoadjuntos del álgebra definida para un sistema.

Nos interesará también notar que al realizar una medida, los detectores que usemos tienen una escala, donde debido a su resolución, obtenemos valores finitos dentro de un rango. De este modo, será necesario contar con una noción de norma, la cual permitirá definir la magnitud del observable a considerar de forma que podamos definir si el observable está acotado o no. Entonces, en esta línea definimos el siguiente concepto:

Definición 6. (Norma) Una norma en un espacio vectorial $\mathfrak{V}$ sobre $\mathbb{C}$, es una función

$\|\cdot\|: \mathfrak{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que satisface para todo $v, w \in \mathfrak{V}$ y escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ que

1. (Positividad) $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0$ si y solo si $v = 0$
2. (Homogeneidad) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
3. (Desigualdad triangular) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Es importante mencionar aquí que en muchas situaciones físicas, algunos objetos que describen los observables resultan ser operadores no acotados (ej: posición, momentum), es decir, su norma es infinita. Para manejar este asunto, requeriremos de algunas definiciones adicionales para trabajar esto. En esta línea, la existencia de una norma nos permite introducir el siguiente concepto:

Definición 7. (Álgebra de Banach) Un álgebra de Banach, es un álgebra asociativa $\mathfrak{A}$ sobre $\mathbb{C}$ equipada con una norma $\|\cdot\|$, tal que

1. Es un espacio completo. Es decir, toda sucesión de Cauchy $\{A_n\}$ en $\mathfrak{A}$ converge a un elemento de $\mathfrak{A}$.
2. La norma es submultiplicativa, es decir, $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, para todo $A, B \in \mathfrak{A}$

La primera propiedad parece algo técnica, pero trabajaremos con operaciones y propiedades definidas a través de límites y series infinitas, por lo que esto asegura que los procesos sean matemáticamente válidos y que las series que definamos tienen sentido.

La segunda propiedad garantiza que la multiplicación sea compatible con la norma definida.

Teniendo estas nociones, definiremos:

Definición 8. (C^* -álgebra) Una C^* -álgebra es un álgebra de Banach $\mathfrak{A}$ sobre $\mathbb{C}$ que está equipada con una operación de involución y que satisface:

$$\|A^* A\| = \|A\|^2$$

para todo $A \in \mathfrak{A}$.

2 Álgebra de Weyl

Como mencionamos antes, algunos observables son operadores no acotados. Para ello entonces necesitamos un procedimiento para pasar desde un conjunto de operadores no acotados a elementos acotados que a su vez preserve la información del sistema que necesitaremos.

Primero, necesitamos definir los grados de libertad del sistema, es decir, el número de cantidades independientes del sistema físico que son libres de variar. Supongamos que tenemos n grados de libertad. Definimos un espacio vectorial V cuya dimensión es igual a este número, $\dim(V) = n$. Este espacio vectorial será un espacio de parámetros que usualmente tomaremos como $V = \mathbb{R}^n$ o $V = \mathbb{C}^n$.

En este espacio vectorial V podemos definir la siguiente estructura matemática:

Definición 9. (Forma simpléctica) Sea V un espacio vectorial. Una forma simpléctica es una función $\sigma: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que es:

1. (Bilineal) $\sigma(\alpha v + \beta w, u) = \alpha \sigma(v, u) + \beta \sigma(w, u)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. (Antisimétrica) $\sigma(u, v) = -\sigma(v, u)$
3. (No degenerada) Si $\sigma(u, v) = 0$ para todo $v \in V$, entonces $u = 0$.

Y con esta definición, a partir de los elementos $v \in V$ construimos un objeto abstracto $W(v)$ que define una C^* -álgebra que llamaremos $\mathfrak{W}(V, \sigma)$:

Definición 10. (*Álgebra de Weyl*) El álgebra de Weyl $\mathfrak{W}(V, \sigma)$ es la C^* -álgebra generada por los objetos $\{W(v)\}_{v \in V}$ y una forma simpléctica σ tal que estos objetos poseen las siguientes relaciones:

1. (*Identidad*) $W(0) = \mathbb{I}$
2. (*Involución*) $W(v)^* = W(-v)$
3. (*Relación de composición*) $W(v)W(w) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(v,w)}W(v+w)$

Para verificar que estos objetos son acotados, primero definiremos la noción de ser unitario:

Definición 11. (*Elemento unitario*) Sea $\mathfrak{A}$ una C^* -álgebra que posee la identidad o unidad $\mathbb{I}$. Un elemento $A \in \mathfrak{A}$ se llama unitario si

$$A^*A = AA^* = \mathbb{I}$$

Notemos que de la definición del álgebra de Weyl, debido a la propiedad 2 se tiene que $W(v)^*W(v) = W(-v)W(v)$, y al usar la propiedad 3 y luego la 1:

$$W(-v)W(v) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(-v,v)}W(0) = e^{-\frac{i}{2}\sigma(-v,v)}\mathbb{I} \quad (1)$$

pero como $\sigma(-v, v) = -\sigma(v, v)$ por bilinealidad de la forma simpléctica y $-\sigma(v, v) = \sigma(v, v)$ por su antisimetría, entonces $W(v)^*W(v) = \mathbb{I}$. Lo mismo ocurre para $W(v)W(v)^*$, por lo que los objetos $W(v)$ son unitarios. Dado que son unitarios, y por ser una C^* -álgebra, como tiene una norma:

$$\|W(v)^*W(v)\| = \|\mathbb{I}\| = 1 \quad (2)$$

Entonces los objetos $W(v)$ definidos por el álgebra de Weyl son acotados, y forman un álgebra bien definida. Los objetos del álgebra de Weyl no serán los observables, sino que los relacionaremos con los observables para extraer información, por lo tanto, trabajaremos entonces con esta C^* -álgebra.

3 Espacio de Hilbert y representaciones

Hasta este punto, hemos definido de manera abstracta las propiedades de los observables, álgebras y el concepto de estado sin preocuparnos de trabajar en alguna representación concreta, es decir, un mapa que lleva los operadores abstractos a algún conjunto donde sabemos trabajar. Para efectos prácticos a veces es útil usar alguna representación, aunque a priori sea posible desarrollar cosas en la estructura abstracta. Para ello requeriremos un par de definiciones antes.

Podemos conectar nuestra formulación de objetos abstractos con la formulación tradicional de la mecánica cuántica definiendo primero:

Definición 12. (*Producto interior*) Sea V un espacio vectorial sobre el cual definiremos una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ al que llamaremos producto interno, el cual satisface:

1. (*Positiva definida*) $\langle v, v \rangle \geq 0$ para todo $v \in V$ y $\langle v, v \rangle = 0$ si y sólo si $v = 0$
2. (*Linealidad en el primer argumento*) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$ para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
3. (*Conjugación hermítica*) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

La definición de este producto interior induce también una norma:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad (3)$$

Este hecho permite definir:

Definición 13. (*Espacio de Hilbert*) Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial complejo con producto interior y que además es completo respecto a la norma inducida por este producto interior.

La definición de un espacio de Hilbert permite usar un resultado importante, el teorema de Gelfand-Naimark:

Teorema 14. (*Gelfand-Naimark*) Sea $\mathfrak{A}$ una C^* -álgebra arbitraria. Entonces existe un espacio de Hilbert y un mapeo $\pi: \mathfrak{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$ tal que para todo $A, B \in \mathfrak{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple:

1. (*Linealidad*) $\pi(\lambda A + B) = \lambda \pi(A) + \pi(B)$
2. (*Preservación del producto*) $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$
3. (*Preservación de la involución*) $\pi(A^*) = (\pi(A))^*$
4. (*Preservación de la norma*) $\|\pi(A)\| = \|A\|$
5. (*Inyectividad*) $\pi(A) = 0 \Rightarrow A = 0$

y aquí $B(\mathcal{H})$ denota la C^* -álgebra de operadores acotados sobre $\mathcal{H}$, y $\pi(\mathfrak{A}) \subseteq B(\mathcal{H})$

Con esto, podemos mapear nuestra álgebra de Weyl $\mathfrak{W}(V, \sigma)$ a un espacio de Hilbert, a partir del cual extraeremos varios elementos importantes.

Notemos que como V es un espacio vectorial, existe una línea que pasa por la dirección de un elemento v definida por todos los puntos formados por la multiplicación de v por un escalar $t \in \mathbb{R}$. Esta línea define además un grupo uniparamétrico unitario continuo a través del álgebra de Weyl $\{W(tv); t \in \mathbb{R}\}$. Si tomamos una representación de los elementos $W(tv)$ en un espacio de Hilbert, $\pi(W(tv))$, la cual está garantizada existir por el teorema de Gelfand-Naimark, podemos entonces usar un importante resultado debido a Stone:

Teorema 15. (*Stone*) Para cada operador autoadjunto A en un espacio de Hilbert, existe un único grupo de operadores unitarios $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ fuertemente continuo tal que $U(t) = e^{itA}$.

De este modo, usando este parámetro t , podemos relacionar la representación $\pi(W(tv))$ con una representación en un espacio de Hilbert de un operador autoadjunto $A(v)$ de la forma:

$$\pi(W(tv)) = e^{itA(v)} \quad (4)$$

Dado que los observables los definimos como todos los operadores autoadjuntos de un sistema, los objetos $A(v)$ aquí son observables que tienen representación en este espacio de Hilbert. Esto indica que podemos relacionar los observables con elementos del álgebra de Weyl. Así, es posible trabajar con objetos acotados aún cuando los observables en sí no lo sean.

A su vez, este observable depende de v , de forma que usando las componentes de v podemos escribir $A(v)$ como:

$$A(v) = \sum_{i=1}^n v_i A_i \quad (5)$$

donde los A_i no necesariamente son autoadjuntos, sino que basta con que la combinación de ellos haga que $A(v)$ lo sea. Al mismo tiempo, la cantidad de estos operadores por construcción es la misma que la dimensión del espacio V , de forma que se requerirá la misma cantidad de estos operadores A_i por cada grado de libertad del sistema para formar los observables de interés. Una manera trivial de definir estos operadores A_i es simplemente usar los observables asociados a las cantidades independientes que varían, sin embargo, a veces, como veremos más adelante, puede ser también útil usar otra elección.

Vemos que la representación en efecto se satisface las relaciones del álgebra de Weyl. Primero, es fácil ver que si $v = 0$, por la expresión (3), entonces $A(v) = 0$, por ende,

$$\pi_\omega(W(t \cdot 0)) = e^{it \cdot 0} = 1. \quad (6)$$

Por otro lado, al tomar el conjugado de (2): $\pi_\omega(W(tv))^* = (e^{itA(v)})^*$. Como $A(v)$ es autoadjunto, $A(v) = A(v)^*$, entonces $\pi_\omega(W(tv))^* = e^{-itA(v)}$. Y de (3) es fácil ver que $A(-v) = -A(v)$, por lo que

$$\pi_\omega(W(tv))^* = \pi_\omega(W(-tv)) \quad (7)$$

Para la última relación, tomamos el producto de dos representaciones:

$$\pi_\omega(W(su))\pi_\omega(W(tv)) = e^{isA(u)}e^{itA(v)} \quad (8)$$

Lema 16. (*Baker-Hausdorff*) Sea A, B operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert. Si los dominios de A, B y $A + B$ tienen un subespacio común y denso D de vectores analíticos, entonces en D tendremos que

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

donde $[A, B]$ conmuta tanto con A como con B .

Usando esta relación de Baker-Hausdorff, la ecuación (6) ahora se podrá escribir de la forma $\pi_\omega(W(su))\pi_\omega(W(tv)) = e^{i(sA(u)+tA(v))} e^{-\frac{1}{2}st[A(u),A(v)]}$. Notemos que debido a (3) se puede ver que $A(su + tv) = sA(u) + tA(v)$ y por lo tanto se tendrá que $e^{i(sA(u)+tA(v))} = \pi_\omega(W(su + tv))$. Así:

$$\pi_\omega(W(su))\pi_\omega(W(tv)) = \pi_\omega(W(su + tv)) e^{-\frac{1}{2}st[A(u),A(v)]} \quad (9)$$

Comparando la exponencial en (7) con la propiedad del álgebra de Weyl, se tendrá que:

$$[A(u), A(v)] = i\sigma(u, v) \quad (10)$$

Esto define la forma simpléctica del álgebra de Weyl $\sigma(u, v)$ en términos del conmutador de los operadores autoadjuntos A en el espacio de Hilbert.

Es importante en este punto mencionar que en la mecánica cuántica usual, donde se trabaja en un espacio de dimensión finita, debido al teorema de Stone-Von Neumann dos representaciones del álgebra en distintos espacios de Hilbert serán equivalentes entre ellas, mientras que esto no será cierto en el caso infinito-dimensional, cuando se trabaje con campos, por lo que se pueden tener varias representaciones no equivalentes entre sí.

4 Álgebra de Von Neumann

Ahora que tenemos una C^* -álgebra sobre un espacio de Hilbert definiremos una nueva estructura. Para ello, primero definiremos:

Definición 17. (*Conmutante*) Sea $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$. Definiremos su conmutante como:

$$\mathcal{M}' = \{X \in B(\mathcal{H}) \mid [X, Y] = 0 \text{ para todo } Y \in \mathcal{M}\}$$

Es decir, el conmutante de un conjunto $\mathcal{M}$ es el conjunto que contiene todos los elementos que conmutan con todos los elementos de $\mathcal{M}$.

Esto permite definir:

Definición 18. (*Álgebra de Von Neumann*) Sea $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ tal que $\mathcal{M}$ es cerrada bajo adjunto (si $X \in \mathcal{M}$ entonces también $X^* \in \mathcal{M}$). Decimos que $\mathcal{M}$ es un álgebra de Von Neumann si es igual a su biconmutante: $\mathcal{M} = (\mathcal{M}')'$.

Notemos que un álgebra de Von Neumann siempre contendrá la identidad, puesto que ésta conmuta con todo operador. A la vez, es cerrada bajo suma y producto, y como por definición es cerrada bajo adjunto, entonces en efecto es un álgebra. Además, como es un subconjunto de los operadores acotados en un espacio de Hilbert, entonces existe allí una norma que satisface las propiedades de ser una C^* -álgebra.

Tomemos entonces el conjunto de todos los objetos $\pi(W(tv)) = e^{itA(v)}$, es decir, la representación del álgebra de Weyl en un espacio de Hilbert, al cual llamaremos $\mathcal{W}$. Consideremos entonces el biconmutante de este conjunto: $\mathcal{M} = (\mathcal{W}')'$. Este conjunto $\mathcal{M}$ naturalmente contiene todos los elementos de $\mathcal{W}$, pues obviamente sus elementos conmutan con los que conmutan con ellos. Pero adicionalmente $\mathcal{M}$ contendrá más elementos, como funciones continuas del operador autoadjunto $A(v)$, pues toda función $f(A(v))$ conmutará con los objetos que conmutan con $e^{itA(v)}$, que es también una función continua de $A(v)$. Así, el conjunto $\mathcal{M}$ es uno más grande que $\mathcal{W}$, al cual incluye.

Al tomar el biconmutante de $\mathcal{M}$ no se agregará ningún otro objeto, por lo que $\mathcal{M} = (\mathcal{M}')'$. Además se puede verificar que en efecto sigue siendo cerrada bajo adjunto, pues por ejemplo, $\mathcal{W}$ lo es y las funciones continuas de $A(v)$ también dado que $A(v)$ es autoadjunto. Por tanto, es una álgebra de Von Neumann.

5 Estado

Ya habiendo visto las relaciones matemáticas que definen los observables y la álgebras, definiremos el concepto de estado. Este concepto se puede pensar como una descripción completa de un sistema físico en un cierto momento, de forma que permite proporcionar toda la información que se puede obtener a través de mediciones. De esta manera, es una especie de mapa que nos permite ver cómo responderá el sistema ante cualquier experimento posible, antes de medirlo. Matemáticamente el estado será definido de la siguiente manera:

Definición 19. (*Estado*) Sea $\mathfrak{A}$ una C^* -álgebra. Un estado es un funcional lineal $\omega: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ que cumple:

1. (*Linealidad*) $\omega(\lambda A + \mu B) = \lambda \omega(A) + \mu \omega(B)$ para todo $A, B \in \mathfrak{A}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
2. (*Positividad*) $\omega(A^*A) \geq 0$ para todo $A \in \mathfrak{A}$
3. (*Normalización*) $\omega(\mathbb{I}) = 1$

Es importante destacar que en la mecánica cuántica, a diferencia de la mecánica clásica, las mediciones en los sistemas corresponden a resultados probabilísticos. De este modo, para cualquier observable A , el estado cuántico nos dará un número $\omega(A)$ que corresponderá al promedio esperado o valor de expectación de medir A . Por tanto, se puede visualizar el estado como un mapa que asigna promedios a observables. Aquí, la linealidad del estado significará que al medir combinaciones de observables, debe dar un promedio combinado. A su vez, la positividad asegura que los promedios no serán negativos para A^*A , y la normalización nos indicará que la probabilidad total es igual a 1.

Podemos definir dos tipos de estado:

Definición 20. (*Estado puro*) Un estado ω es puro si no puede escribirse como combinación convexa de otros estados ω_1 y ω_2 , es decir:

$$\omega = \lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega \text{ para } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } 0 < \lambda < 1$$

Definición 21. (*Estado mixto*) Un estado ω es mixto si se puede expresar como combinación convexa de estados puros:

$$\omega = \sum_i p_i \omega_i \text{ con } p_i \geq 0 \text{ y } \sum_i p_i = 1$$

De aquí, los estados puros entonces serán aquellos que no podemos descomponer en otros, mientras que los mixtos corresponderán a combinaciones de varios otros estados con distintas probabilidades, definidas por los pesos p_i .

Habiendo definido un estado, es posible definir también:

Definición 22. (*Estado normal*) Un estado $\omega: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ es normal si para cualquier sucesión monótona creciente y acotada de operadores positivos $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{A}$ que tiene un supremo $A = \sup_n A_n$ se cumple que $\omega(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(A_n)$.

De forma simple, un estado es normal es continuo con respecto a los límites de las propiedades medidas. Esto significa que el valor esperado de la propiedad final del sistema será idéntico al límite de los valores de expectación de las mediciones parciales.

Esta definición se restringe a operadores positivos, sin embargo, para un observable general, como los $A(v)$ que aparecen en la representación del álgebra de Weyl, no necesariamente son positivos, cualquier operador autoadjunto se puede descomponer en la diferencia de dos operadores positivos ($\frac{1}{2}(\|A(v)\| \pm A(v))$), por lo que si el estado satisface la definición para sucesiones de estas descomposiciones, entonces también lo hará para el resto del álgebra.

Aceptando la existencia de estados normales para nuestra álgebra de Von Neumann construida, entonces podemos utilizar un teorema relevante:

Teorema 23. Sea ω un estado sobre un álgebra de Von Neumann $\mathcal{M}$ actuando sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) ω es normal

(2) Existe un operador positivo ρ sobre $\mathcal{H}$ con $\text{Tr}(\rho) = 1$ tal que $\omega(A) = \text{Tr}(\rho A)$

donde la traza satisface las siguientes propiedades:

1. (Linealidad) $\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B)$
2. (Invariancia por transposición y adjunto) $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, $\text{Tr}(A^\dagger) = (\text{Tr}(A))^*$
3. (Ciclicidad) $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA)$
4. (Compatibilidad con la identidad) $\text{Tr}(I) = n$ si I es la identidad en dimensión n
5. (Positividad para operadores positivos) Si $A \geq 0$ entonces $\text{Tr}(A) \geq 0$

Este operador ρ , es al que llamaremos matriz densidad, nos permite entonces representar el estado en un espacio de Hilbert y éste nos servirá para obtener toda información del sistema.

Notemos que efectivamente esta representación del estado satisface las propiedades de ser estado:

Primero, por las propiedades de la traza, vemos que cumple linealidad:

$$\omega(\lambda A + \mu B) = \text{Tr}(\rho(\lambda A + \mu B)) = \lambda \text{Tr}(\rho A) + \mu \text{Tr}(\rho B) = \lambda \omega(A) + \mu \omega(B) \quad (11)$$

Al mismo tiempo, por positividad:

$$\omega(A^*A) = \text{Tr}(\rho A^*A) \geq 0 \quad (12)$$

pues $\rho \geq 0$ y $A^*A \geq 0$.

Y:

$$\omega(\mathbb{I}) = \text{Tr}(\rho \mathbb{I}) = \text{Tr}(\rho) = 1 \quad (13)$$

Por tanto, esta representación es un estado.

Dado que el estado, como mencionamos antes entrega el valor de expectación de la medida de un observable, para hacer conexión con el lenguaje usual en mecánica cuántica, denotaremos $\omega(A) = \langle A \rangle$.