

Apéndice B: Distribuciones

Consideremos en el espacio de funciones suaves de decaimiento rápido $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, las cuales llamamos funciones de prueba o funciones de Schwartz. Al ser funciones suaves, todas sus derivadas existen, mientras que el concepto de decaimiento rápido significa que estas funciones $f(x)$ y sus derivadas tienden a cero más rápido que $\frac{1}{|x|^n}$ para cualquier n cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Consideremos ahora el conjunto de todos los funcionales lineales $\Phi: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. A los elementos de este conjunto los llamaremos distribuciones. No entraremos en muchos detalles sobre la teoría de distribuciones, sino que nos centraremos sólo en algunos aspectos que nos serán útiles.

Cualquier función localmente integrable g define una distribución, que llamaremos distribución regular, mediante la integración:

$$\Phi_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} dx g(x) f(x) \quad (1)$$

para cualquier función de prueba $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Las distribuciones regulares nos servirán para definir ciertas propiedades de las distribuciones. Notemos que estos objetos se pueden sumar y seguirán siendo distribuciones:

$$\Phi_g(f) + \Phi_h(f) = \int_{\mathbb{R}^n} dx g(x) f(x) + \int_{\mathbb{R}^n} dx h(x) f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dx (g(x) + h(x)) f(x) = \Phi_{g+h}(f) \quad (2)$$

Lo mismo para multiplicaciones por un escalar:

$$\alpha \Phi_g(f) = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} dx g(x) f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} dx (\alpha g(x)) f(x) = \Phi_{\alpha g}(f) \quad (3)$$

Sin embargo en general no se pueden multiplicar.

Una propiedad importante es que si tenemos:

$$\Phi'_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} dx (\partial_x g(x)) f(x) \quad (4)$$

al integrar por partes:

$$\Phi'_g(f) = - \int_{\mathbb{R}^n} dx g(x) (\partial_x f(x)) = -\Phi_g(f') \quad (5)$$

puesto que como f decae rápidamente cuando $|x| \rightarrow \infty$ entonces el término de borde $\int_{\mathbb{R}^n} dx \partial_x (g(x) f(x))$ se anula. Esto define esencialmente la derivación de una distribución, para cualquier distribución se cumple que $\Phi'_g(f) = -\Phi_g(f')$.

Con estas ideas, podemos definir una distribución, que denotaremos por δ_0 tal que evalúa en cero la variable del argumento en la función de prueba $f(x)$, es decir, $\delta_0(f) = f(0)$. Supongamos que podemos escribir esta distribución como una integral, de la forma en que lo hacemos con las distribuciones regulares:

$$\delta_0(f) = f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \delta(x) f(x) \quad (6)$$

Esto da la definición formal de la delta de Dirac. Supongamos que tenemos ahora la integral $\int_{\mathbb{R}^n} dx \delta(x-a) f(x)$ para $a \in \mathbb{R}^n$. Un cambio de variable $y = x - a$ simplemente deja la integral en $\int_{\mathbb{R}^n} dy \delta(y) f(y+a)$. La distribución delta de Dirac entonces sólo cambia el argumento y por cero, por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \delta(x-a) f(x) = f(a) \quad (7)$$

De la misma manera, es posible mostrar que para $a \neq 0$, el objeto $\int_{\mathbb{R}^n} dx \delta(ax) f(x)$ puede reescribirse usando un cambio de variable $y = ax$ como $\frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}^n} dy \delta(y) f\left(\frac{y}{a}\right)$ ya sea que a sea positivo o negativo. Por tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \delta(ax) f(x) = \frac{1}{|a|} f(0) \quad (8)$$

Esto lleva a que se cumple también que $\delta(-x) = \delta(x)$.

Por otra parte, que por la definición de la derivada en la distribución, se define la derivada de la delta de Dirac por:

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \frac{d\delta(x)}{dx} f(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} dx \delta(x) \frac{df(x)}{dx} \quad (9)$$

Notemos que todas estas definiciones sólo tienen sentido en presencia de funciones de prueba.