

Apéndice C: Integrales Gaussianas

En la construcción de nuestra notación, para el caso de índices continuos la integración forma parte relevante. Dentro de las construcciones que realizaremos se hará un uso extensivo de la integral, y de manera especial, un tipo de integral importante será la integral gaussiana, la cual se irá desarrollando en diversos conjuntos. Es por ello que necesitaremos revisar lo básico de estas integrales antes de nuestra construcción.

1 Las primeras integrales gaussianas

Una integral gaussiana es una integral del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (1)$$

donde partimos en su forma más simple, en sólo una dimensión. Para encontrar su valor, la forma usual es tomar el cuadrado de la integral (2):

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{1}{2}y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad (2)$$

donde podemos realizar esto dado que los índices son mudos. Por otro lado, usando una transformación de coordenadas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r dr d\theta e^{-\frac{1}{2}r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-\frac{1}{2}r^2} \quad (3)$$

y realizando la transformación $t = \frac{1}{2}r^2$ como resultado tenemos que la medida $dt = r dr$. Entonces:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)^2 = 2\pi \int_0^{\infty} dt e^{-t} = 2\pi \Gamma(1) = 2\pi \quad (4)$$

Así, al tomar la raíz, obtenemos que el resultado es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{2\pi} \quad (5)$$

Ahora, podemos extender este resultado para calcular $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2}$ con $a > 0$. Esta condición es importante, de otro modo, la integral no converge. De esta manera, con un cambio de variable $x = \frac{y}{\sqrt{a}}$ esta integral queda de la forma (6) salvo un factor extra y obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad (6)$$

Usando este resultado, podemos desarrollar la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 + Jx} \quad (7)$$

Arreglando esta integral tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 + Jx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}a\left(x^2 - 2\frac{J}{a}x\right)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}a\left(x - \frac{J}{a}\right)^2} e^{\frac{J^2}{2a}} \quad (8)$$

donde hemos sumado $\frac{J^2}{2a}$ en la exponencial para completar cuadrados. De esta forma, haciendo el cambio de variable $y = x - \frac{b}{a}$, tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 + Jx} = e^{\frac{J^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{1}{2}ay^2} \quad (9)$$

Por lo tanto, usando el resultado de (7) tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 + Jx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{J^2}{2a}} \quad (10)$$

2 Integral gaussiana con un factor i

Teniendo en consideración los métodos anteriores, ahora calcularemos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{i}{2}x^2} \quad (11)$$

Para resolverla, realizaremos la integración en el plano complejo $\oint_{\gamma} dz e^{\frac{i}{2}z^2}$ para un cierto camino cerrado γ . El teorema de Cauchy indica que

$$\oint_{\gamma} dz e^{\frac{i}{2}z^2} = 0 \quad (12)$$

ya que $e^{\frac{i}{2}z^2}$ es holomorfa. Por otro lado, tomemos el camino de integración mostrado en la figura 1.

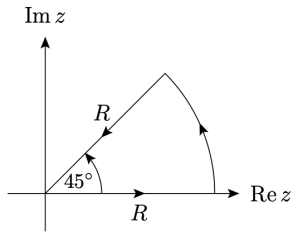


Figura 1. Camino de integración en el plano complejo

De esta forma, descomponemos la integral como:

$$\oint_{\gamma} dz e^{\frac{i}{2}z^2} = \oint_1 dz e^{\frac{i}{2}z^2} + \oint_2 dz e^{\frac{i}{2}z^2} + \oint_3 dz e^{\frac{i}{2}z^2} \quad (13)$$

El primer camino va a lo largo del eje real:

$$\oint_1 dz e^{\frac{i}{2}z^2} = \int_0^R dx e^{\frac{i}{2}x^2} \quad (14)$$

El segundo camino es el arco, el cual mostraremos que se anula cuando $R \rightarrow \infty$. Aquí, $z = Re^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Con esto, la medida de integración es $dz = iRe^{i\theta}d\theta$ y tendremos que:

$$\oint_2 dz e^{\frac{i}{2}z^2} = iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta e^{i\theta} e^{\frac{i}{2}R^2 e^{2i\theta}} \quad (15)$$

Usaremos que $\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta f(\theta) \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta |f(\theta)|$ y que $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Con eso, se tiene que

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta i R e^{i\theta} e^{\frac{i}{2} R^2 e^{2i\theta}} \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left| i R e^{i\theta} e^{\frac{i}{2} R^2 e^{2i\theta}} \right| = R \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta e^{-\frac{1}{2} R^2 \sin(2\theta)} \quad (16)$$

Así, realizando un cambio de variables $2\theta = \alpha$:

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta i R e^{i\theta} e^{\frac{i}{2} R^2 e^{2i\theta}} \right| \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha e^{-\frac{1}{2} R^2 \sin \alpha} \quad (17)$$

y usando la desigualdad de Jordan $\frac{2\alpha}{\pi} \leq \sin \alpha \leq \alpha$ cuando $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ tenemos que:

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta i R e^{i\theta} e^{\frac{i}{2} R^2 e^{2i\theta}} \right| \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha e^{-\frac{1}{2} R^2 \sin \alpha} \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha e^{-R^2 \frac{\alpha}{\pi}} \quad (18)$$

Realizamos el cambio de variable $R^2 \frac{\alpha}{\pi} = x$ y tenemos

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta i R e^{i\theta} e^{\frac{i}{2} R^2 e^{2i\theta}} \right| \leq \frac{\pi}{R^2} \left(1 - e^{-\frac{R^2}{2}} \right) \quad (19)$$

Observamos que cuando $R \rightarrow \infty$ este resultado tiende a cero. Por tanto, la integral se anula en este límite.

Ahora, revisamos el tercer camino, que corresponde a la parte diagonal en la figura 1. Allí $z = r e^{\frac{i\pi}{4}}$. Por tanto, la medida de integración es $dz = dr e^{\frac{i\pi}{4}}$ y la integral es

$$\oint_3 dz e^{\frac{i}{2} z^2} = e^{\frac{i\pi}{4}} \int_R^0 dr e^{\frac{i}{2} r^2} e^{\frac{i\pi}{2}} \quad (20)$$

Dado que $e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$ tendremos que

$$\oint_3 dz e^{\frac{i}{2} z^2} = e^{\frac{i\pi}{4}} \int_R^0 dr e^{-\frac{1}{2} r^2} \quad (21)$$

Tomando los resultados de (13), (14), (15), (20) y (22) en el límite $R \rightarrow \infty$:

$$\int_0^\infty dx e^{\frac{i}{2} x^2} = e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^\infty dr e^{-\frac{1}{2} r^2} \quad (22)$$

Dado que las integrales son funciones pares:

$$\int_{-\infty}^\infty dx e^{\frac{i}{2} x^2} = e^{\frac{i\pi}{4}} \int_{-\infty}^\infty dr e^{-\frac{1}{2} r^2} \quad (23)$$

Usamos el resultado de la ecuación (6):

$$\int_{-\infty}^\infty dx e^{\frac{i}{2} x^2} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} \quad (24)$$

De manera análoga, pero tomando un contorno de integración reflejado en el eje x , es decir, que el arco está definido entre $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0$, tendremos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{i}{2}x^2} = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{i\pi}{4}} \quad (25)$$

Así, podemos resumir ambas integrales en

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm \frac{i}{2}x^2} = \sqrt{2\pi} e^{\pm \frac{i\pi}{4}} \quad (26)$$

Como consecuencia, es fácil ver que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm \frac{i}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\pm \frac{i\pi}{4}} \quad (27)$$

y también

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm i(\frac{1}{2}ax^2 - Jx)} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\pm \frac{i\pi}{4}} e^{\mp \frac{iJ^2}{2a}} \quad (28)$$

3 Integral gaussiana para vectores n -dimensionales

Ahora, tomemos un vector n -dimensional $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y una matriz A de dimensiones $n \times n$, tal que

es positiva definida, es decir, $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x}$ no nulo. Además requeriremos que esta matriz sea simétrica, es decir, $A^T = A$, e invertible. Calcularemos la integral definida por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n e^{\pm \frac{i}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}} \quad (29)$$

Podemos diagonalizar esta matriz A de forma que $A = R^T D R$, donde R es una matriz ortogonal ($R^T R = 1$) y D la matriz diagonal cuyas entradas son los autovalores de A : $a_1, a_2, \dots, a_n$. Con esto, escribimos la integral como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n e^{\pm \frac{i}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n e^{\pm \frac{i}{2} \mathbf{x}^T R^T D R \mathbf{x}} \quad (30)$$

Realizando el cambio de variables $\mathbf{y} = R \mathbf{x}$, tendremos que como R es ortogonal $\det(R) = 1$. Por lo tanto el Jacobiano de la transformación es uno. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n e^{\pm \frac{i}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \dots dy_n e^{\pm \frac{i}{2} \mathbf{y}^T D \mathbf{y}} \quad (31)$$

Como D es diagonal, $\mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n a_i y_i^2$. Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n e^{\pm \frac{i}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy_1 e^{\pm \frac{i}{2} a_1 y_1^2} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy_2 e^{\pm \frac{i}{2} a_2 y_2^2} \right) \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy_n e^{\pm \frac{i}{2} a_n y_n^2} \right) \quad (32)$$

Usando el resultado de (26):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n e^{\pm \frac{i}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{\pm \frac{i\pi n}{4}}}{\sqrt{\det A}} \quad (33)$$

A partir de esto es fácil generalizar para

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots dx_n e^{\pm i \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{x} \right)} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{\pm \frac{i\pi n}{4}}}{\sqrt{\det A}} e^{\mp \frac{i}{2} \mathbf{J}^T A^{-1} \mathbf{J}} \quad (34)$$

donde $\mathbf{J}$ es un vector.

4 Integrales gaussianas complejas

Ahora nos enfocaremos en la integral compleja:

$$\int dz dz^* e^{-z^* z} \quad (35)$$

con $z \in \mathbb{C}$. Usamos que $z = x + iy$ y $z^* = x - iy$. Con esto el Jacobiano es:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z^*}{\partial x} & \frac{\partial z^*}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad (36)$$

por lo tanto $|\det(J)| = 2i$ y la medida entonces es $dz dz^* \rightarrow 2i dx dy$. Con esto:

$$\int dz dz^* e^{-z^* z} = 2i \int dx dy e^{-(x^2 + y^2)} \quad (37)$$

Notamos que esta integral es similar (2). Por tanto, realizando un cambio de variable $\sqrt{2}x \rightarrow x$ obtendremos que

$$\int dz dz^* e^{-z^* z} = 2\pi i \quad (38)$$

Con esto, es fácil mostrar que

$$\int dz dz^* e^{-z^* a z} = \frac{2\pi i}{a} \quad (39)$$

para $a \in \mathbb{R}$ y $a > 0$.

Del mismo modo podemos calcular

$$\int dz dz^* e^{-z^* a z + J^* z + z^* J} \quad (40)$$

Sumando y restando $J^* \frac{1}{a} J$ podemos arreglar la integral, realizar un cambio de variable $w = z - \frac{1}{a} J$ y tendremos que:

$$\int dz dz^* e^{-z^* a z + J^* z + z^* J} = e^{J^* \frac{1}{a} J} \int dw dw^* e^{-w^* a w} \quad (41)$$

Usando el resultado de (38) tendremos que:

$$\int dz dz^* e^{-z^* a z + J^* z + z^* J} = \frac{2\pi i}{a} e^{J^* \frac{1}{a} J} \quad (42)$$

Con esto, podemos generalizar a integrales con vectores complejos del tipo

$$\int d\mathbf{z} d\mathbf{z}^* e^{-\mathbf{z}^* A \mathbf{z}} \quad (43)$$

donde A debe ser autoadjunta, positiva definida e invertible. Para este caso, podemos escribir $A = U^\dagger D U$, con U una matriz unitaria ($U^\dagger U = 1$) y D la matriz diagonal cuyas entradas son los autovalores de A . Definiendo $\mathbf{w} = U\mathbf{z}$, y como la matriz U es unitaria el Jacobiano será uno, por tanto la integral ahora se escribe

$$\int d\mathbf{z} d\mathbf{z}^* e^{-\mathbf{z}^* A \mathbf{z}} = \int d\mathbf{w} d\mathbf{w}^* e^{-\mathbf{w}^* D \mathbf{w}} \quad (44)$$

Como D es diagonal, $\mathbf{w}^* D \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n a_i |w_i|^2$ y entonces:

$$\int d\mathbf{z} d\mathbf{z}^* e^{-\mathbf{z}^* A \mathbf{z}} = \left(\int dw_1 dw_1^* e^{-w_1^* a_1 w_1} \right) \left(\int dw_2 dw_2^* e^{-w_2^* a_2 w_2} \right) \dots \left(\int dw_n dw_n^* e^{-w_n^* a_n w_n} \right) \quad (45)$$

Usando (38), obtenemos

$$\int d\mathbf{z} d\mathbf{z}^* e^{-\mathbf{z}^* A \mathbf{z}} = \frac{(2\pi i)^n}{\det A} \quad (46)$$

Resultado que podemos generalizar a:

$$\int d\mathbf{z} d\mathbf{z}^* e^{-\mathbf{z}^* A \mathbf{z} + \mathbf{J}^* \mathbf{z} + \mathbf{z}^* \mathbf{J}} = \frac{(2\pi i)^n}{\det A} e^{\mathbf{J}^* A^{-1} \mathbf{J}} \quad (47)$$

5 Integrales con términos no cuadráticos

Hasta aquí, hemos calculado integrales que constan de términos cuadráticos. Veamos ahora qué ocurre cuando le añadimos un término con una potencia superior. Para ello miraremos la integral:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 - \lambda x^4} \quad (48)$$

donde $a > 0$ y $\lambda \geq 0$. El caso $\lambda = 0$ corresponde a la integral (7) que ya calculamos. Tomemos entonces el caso $\lambda \neq 0$ y arreglamos esta integral:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda(x^4 + 2\frac{a}{4\lambda}x^2)} = e^{\frac{a^2}{16\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda(x^4 + 2\frac{a}{4\lambda}x^2 + \frac{a^2}{16\lambda^2})} = e^{\frac{a^2}{16\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a^2}{16\lambda}(\frac{4\lambda}{a}x^2 + 1)^2} \quad (49)$$

Realizamos un cambio de variable $y = 2\sqrt{\frac{\lambda}{a}}x$, con esto la medida de integración pasa a ser $dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\lambda}}dy$ y usando que el integrando es una función par:

$$Z = \sqrt{\frac{a}{\lambda}} e^{\frac{a^2}{16\lambda}} \int_0^{\infty} dy e^{-2\frac{a^2}{32\lambda}(y^2+1)^2} \quad (50)$$

Esta integral tiene solución exacta¹ la cual es:

$$\int_0^{\infty} dy e^{-2\frac{a^2}{32\lambda}(y^2+1)^2} = 2^{-3/2} e^{-\frac{a^2}{32\lambda}} K_{1/4}\left(\frac{a^2}{32\lambda}\right) \quad (51)$$

Con esto, la ecuación (49) es

$$Z = \sqrt{\frac{a}{8\lambda}} e^{\frac{a^2}{32\lambda}} K_{1/4}\left(\frac{a^2}{32\lambda}\right) \quad (52)$$

1. Moll, Victor H. *Special Integrals of Gradshteyn and Ryzhik: The Proofs*. Vol. 1. CRC Press, 2014.

Ahora, calculemos esta integral de otra manera. Expandimos en series la exponencial que contiene λ :

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n x^{4n}}{n!} \quad (53)$$

Ahora intercambiamos la suma con la integral. Esto puede realizarse sólo si el integrando es convergente. Sin probar aquello continuamos y se obtiene:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} x^{4n} \quad (54)$$

Para resolverla integral en (53) observemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} x^{4n} = \int_0^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} x^{4n} - \int_0^0 dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} (-x)^{4n} = (1 + (-1)^{4n}) \int_0^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} x^{4n} \quad (55)$$

Realizamos el cambio de variable $\frac{1}{2}ax^2 = t$, con esto la integral queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} x^{4n} = \frac{2^{2n-\frac{1}{2}}}{a^{2n+\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{2n-\frac{1}{2}} = \frac{2^{2n-\frac{1}{2}}}{a^{2n+\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{(2n+\frac{1}{2})-1} = \frac{2^{2n-\frac{1}{2}}}{a^{2n+\frac{1}{2}}} \Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right) \quad (56)$$

usando que $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi} \Gamma(2z)$ tenemos que $\Gamma(2n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{4n}} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(4n+1)}{\Gamma(2n+1)} = \frac{1}{2^{4n}} \sqrt{\pi} \frac{(4n)!}{(2n)!}$, y por lo tanto

$$Z = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 + (-1)^{4n})}{2^{2n+1}} \frac{(4n)!}{n!(2n)!} \left(\frac{\lambda}{a^2}\right)^n \quad (57)$$

Veamos el radio de convergencia de la serie. Para ello usaremos el criterio del cociente. Éste establece que para una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ tomamos el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Si el resultado de esta operación es un número L tal que $0 \leq L < 1$, entonces la serie converge. Para la serie en (56) este límite da:

$$\frac{(-1)(1 + (-1)^{4n+4})}{(1 + (-1)^{4n})} \frac{16n(1 + \frac{3}{4n})(1 + \frac{1}{4n})}{(1 + \frac{1}{n})} \left(\frac{\lambda}{a^2}\right) \quad (58)$$

Vemos que la presencia del término $16n$ significa que el límite diverge cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, la serie diverge para cualquier valor de λ donde $\lambda \neq 0$. Sin embargo, de todos modos es posible extraer información en puntos cercanos a $\lambda = 0$ antes que la serie diverja. Esto es posible debido a que se trata de una serie asintótica. Para ilustrar esto consideremos como ejemplo $a = 5$ y $\lambda = 0.1$. En la figura 2 se muestra en la línea roja el valor exacto calculado a partir de (51). Observamos que la serie se aproxima bien al valor exacto desde el tercer elemento hasta aproximadamente el 35, donde la serie empieza a diverger.

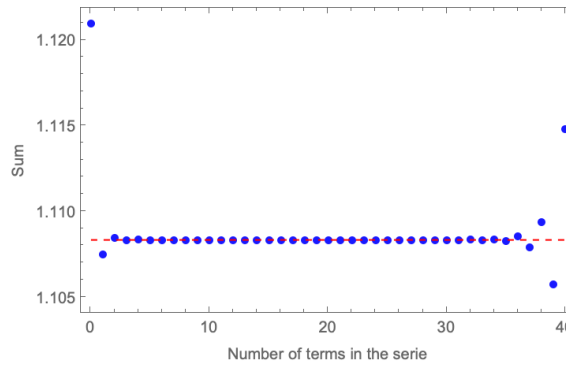


Figura 2. Comparación del valor exacto de Z y el valor aproximado desde la serie, considerando la cantidad de términos

De esta manera, aunque la serie no es convergente, para valores pequeños de λ , sigue siendo una herramienta útil, lo que justificará un procedimiento perturbativo cuando trabajemos con las integrales de camino.