

Apéndice D: Derivadas funcionales

Para poder trabajar con un funcional generador, definiremos la derivada funcional como:

Definición 1. (*Derivada funcional*) Sea $F[J]$ un funcional de la fuente $J: [t_0, t] \rightarrow \mathbb{C}$. Decimos que F es diferenciable en el sentido de Gateaux si para toda variación arbitraria δJ existe un objeto $\frac{\delta F}{\delta J(\cdot)}$ tal que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[J + \epsilon \delta J] - F[J]}{\epsilon} = \int_{t_0}^t dt' \frac{\delta F}{\delta J(t')} \delta J(t')$$

Veamos ejemplos entonces de cómo calcular estas derivadas funcionales. El primer ejemplo es:

$$F[J] = \int_{t_0}^t dt' J(t') f(t') \quad (1)$$

con f una función fija. Luego:

$$F[J + \epsilon \delta J] - F[J] = \int_{t_0}^t dt' (J(t') + \epsilon \delta J(t')) f(t') - \int_{t_0}^t dt' J(t') f(t') \quad (2)$$

dividiendo por ϵ y tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{t_0}^t dt' \frac{\delta F}{\delta J(t')} \delta J(t') = \int_{t_0}^t dt' f(t') \delta J(t') \quad (3)$$

Por lo tanto

$$\frac{\delta F}{\delta J(t')} = f(t') \quad (4)$$

Esto indica que siempre que derivemos funcionalmente respecto a $J(t_1)$ objetos donde hay productos $J(t')f(t')$ dentro de una integral, simplemente es dicha función f evaluada en el argumento del J que está derivando.

También es útil para objetos más complejos como:

$$F[J] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' J(t') K(t', t'') J(t'') \quad (5)$$

donde $K(t', t'')$ se suele llamar Kernel y suponemos que éste es simétrico.

Para este caso, vemos que:

$$\begin{aligned} \frac{F[J + \epsilon \delta J] - F[J]}{\epsilon} &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' (J(t') + \epsilon \delta J(t')) K(t', t'') (J(t'') + \epsilon \delta J(t'')) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' J(t') K(t', t'') J(t'') \\ &= \frac{\epsilon}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' \delta J(t') K(t', t'') \delta J(t'') \end{aligned} \quad (6)$$

y al tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{t_0}^t dt' \frac{\delta F}{\delta J(t')} \delta J(t') = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' J(t') K(t', t'') \delta J(t'') + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' \delta J(t') K(t', t'') J(t'')$$

tras hacer un cambio de variable $t' \leftrightarrow t''$ en la primera integral de la derecha se obtiene que

$$\frac{\delta F}{\delta J(t')} = \int_{t_0}^t dt'' K(t', t'') J(t'') \quad (7)$$

Notamos con estos ejemplos que podemos sintetizar esto pensando en la derivada funcional como una derivada usual, donde:

$$\frac{\delta J(t)}{\delta J(t')} = \delta(t - t') \quad (8)$$