

Integral de camino, funciones de correlación y funcional generador

Notamos que el valor de expectación fue calculado justamente en el tiempo en que se evoluciona de vuelta a t_0 . En principio, es posible evaluarlo en cualquier punto de la propagación hacia adelante o hacia atrás. Para ello, usando las propiedades del operador U , es posible reescribir el valor de expectación como:

$$\langle A(t) \rangle = \text{Tr}(U(t_0, t_f)U(t_f, t)AU(t, t_0)\rho(t_0)) \quad (1)$$

donde la lectura indica que se parte desde la matriz densidad inicial en t_0 , se evoluciona hacia adelante, se mide el observable A en el tiempo t , se sigue evolucionando hacia adelante hasta un tiempo t_f arbitrario, mayor que el tiempo t , y luego desde ahí se evoluciona de vuelta hacia t_0 . De este modo, la evaluación de A ocurre en la rama de ida.

Por otro lado, usando las mismas propiedades también se podría escribir como

$$\langle A(t) \rangle = \text{Tr}(U(t_0, t)AU(t, t_f)U(t_f, t_0)\rho(t_0)) \quad (2)$$

donde aquí, se propaga desde t_0 hasta el tiempo t_f , donde se evoluciona de vuelta, hasta un tiempo t , donde se evalúa el observable A y se continúa la evolución de vuelta a t_0 . Así, la evaluación de A ocurriría en la rama de vuelta.

Revisemos rápidamente el primer caso. Notamos que es posible hacer la misma división de tiempos $\epsilon = \frac{t_f - t_0}{N}$, de forma que el operador $U(t_0, t_f)$ se escribirá de la misma forma que se hizo con la evolución de vuelta. Para la evolución de ida, tendremos que podemos dividir las N partes del intervalo total en dos, una parte que llamaremos N_0 que son las que van desde t_0 a t y el restante $N - N_0$ a las partes del intervalo entre t y t_f . De este modo, para el primer intervalo, tendremos índices $q_1^+, \dots, q_{N_0}^+$ y para el otro, índices $q_{N_0+1}^+, \dots, q_N^+$. Así, se obtendrá algo similar a la ecuación (3), pero esta vez:

$$\begin{aligned} \langle A(t) \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \left(\frac{2\pi\hbar m}{\epsilon} \right)^{N/2} \prod_{k=0}^N \int_{\mathcal{Q}} dq_k^- \right) e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{q_{k+1}^- - q_k^-}{\epsilon} \right)^2 - V(q_k^-) \right)} \times \\ &\left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{N-N_0}} \left(\frac{2\pi\hbar m}{\epsilon} \right)^{(N-N_0)/2} \prod_{k=N_0}^N \int_{\mathcal{Q}} dq_k^+ \right) e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=N_0}^N \epsilon \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{q_{k+1}^+ - q_k^+}{\epsilon} \right)^2 - V(q_k^+) \right)} A[q_{N_0+1}^+, \\ &q_{N_0}^+] \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^{N_0}} \left(\frac{2\pi\hbar m}{\epsilon} \right)^{N_0/2} \prod_{k=0}^{N_0} \int_{\mathcal{Q}} dq_k^+ \right) e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^{N_0-1} \epsilon \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{q_{k+1}^+ - q_k^+}{\epsilon} \right)^2 - V(q_k^+) \right)} \rho(t_0)[q_0^+, q_0^-] \end{aligned} \quad (3)$$

Dado que $A[q_{N_0+1}^+, q_{N_0}^+]$ es un número, podemos moverlo y podemos juntar los productos de coeficientes e integrales de los índices que llamamos q^+ , de forma que realizando los mismos pasos que antes, finalmente se tendrá que

$$\langle A(t) \rangle = \int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- A(q^+(t)) \rho[q^+(t_0), q^-(t_0)] e^{\frac{i}{\hbar} (S[q^+] - S[q^-])} \quad (4)$$

donde en este caso,

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_f} dt' L(q, \dot{q}) \quad (5)$$

y $t_0 \leq t \leq t_f$. Nos damos cuenta que la ecuación (13) es exactamente la misma que la ecuación (9). Al realizar lo mismo para el caso de evaluar A en la rama de vuelta (ecuación (11)) el único cambio sería que dentro de la integral tendríamos $A(q^-(t))$, denotando que hemos evaluado el operador en la rama de vuelta. De este modo, podemos evaluar valores de expectación de observables sin importar en qué rama los evaluamos.

1 Funciones de correlación

Hemos escrito el valor de expectación para un operador en un tiempo t , el cual naturalmente depende de un sólo tiempo, pues consiste en el valor promedio de lo que mediríamos mediante el observable A para ese tiempo específico. Sin embargo, a veces nos interesa estudiar valores promedios de productos de operadores en tiempos distintos. A estos objetos los llamamos correladores o funciones de correlación de n puntos, donde n indica cuántos operadores estamos multiplicando para calcular ese promedio. Definiremos de manera similar a cómo lo hicimos para el valor de expectación el correlador de 2 puntos:

$$\langle A(t)B(t') \rangle = \text{Tr}(\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)AU(t, t_0)U^\dagger(t', t_0)BU(t', t_0)) \quad (6)$$

Podemos usando las propiedades de U reescribir esta expresión como

$$\langle A(t)B(t') \rangle = \text{Tr}(U(t_0, t)AU(t, t')BU(t', t_0)\rho(t_0)) \quad (7)$$

Es fácil notar que si escogemos $B(t') = \mathbb{I}$:

$$\langle A(t)\mathbb{I} \rangle = \text{Tr}(U(t_0, t)AU(t, t')U(t', t_0)\rho(t_0)) = \text{Tr}(U(t_0, t)AU(t, t_0)\rho(t_0)) = \langle A(t) \rangle \quad (8)$$

donde en la segunda igualdad hemos usado la composición de U . Así, recuperamos el valor de expectación si uno de los dos es la identidad.

Al igual que en el valor de expectación, es posible interpretar que los operadores son evaluados en las ramas de ida y de vuelta en nuestro formalismo. Como ahora son dos observables, existen diferentes combinaciones donde se pueden evaluar:

1. A y B en la rama de ida:

$$\langle A(t)B(t') \rangle = \text{Tr}(U(t_0, t_f)U(t_f, t)AU(t, t')BU(t', t_0)\rho(t_0)) \quad (9)$$

Vemos que aquí partimos de t_0 , evolucionamos hasta t' , evaluamos B , seguimos propagando hasta t , evaluamos A , propagamos hasta el tiempo t_f que corresponde al punto donde el contorno se devuelve, y volvemos hasta t_0 .

2. A y B en la rama de vuelta:

$$\langle A(t)B(t') \rangle = \text{Tr}(U(t_0, t)AU(t, t')BU(t', t_f)U(t_f, t_0)\rho(t_0)) \quad (10)$$

Aquí partimos de t_0 , evolucionamos hasta t_f , donde el contorno se devuelve. Evolucionamos de vuelta desde t_f hasta t' , evaluamos B , seguimos propagando de vuelta hasta t , evaluamos A , y continuamos evaluando de vuelta hasta t_0 .

3. A en la rama de vuelta y B en la rama de ida:

$$\langle A(t)B(t') \rangle = \text{Tr}(U(t_0, t)AU(t, t_f)U(t_f, t')BU(t', t_0)\rho(t_0)) \quad (11)$$

En este caso partimos de t_0 , evolucionamos hasta t' , evaluamos B , evolucionamos desde t' hasta t_f , para allí volver, evolucionamos de vuelta hasta t , evaluamos A y continuamos la evolución de vuelta desde t hasta t_0 .

4. A en la rama de ida y B en la rama de vuelta:

$$\langle A(t)B(t') \rangle = \text{Tr}(U(t_0, t)AU(t, t_f)U(t_f, t')BU(t', t_f)U(t_f, t_0)\rho(t_0)) \quad (12)$$

En este último caso, partimos de t_0 , evolucionamos hasta el tiempo t_f en que el contorno se devuelve, evolucionamos de vuelta desde t_f hasta t' , donde evaluamos B , nos devolvemos hacia adelante, evolucionando desde t' otra vez a t_f , donde el contorno vuelve, por la rama de ida, y en esa rama superior, evolucionamos hasta t , evaluamos A y luego retrocedemos por la rama de ida desde t hasta t_0 .

De la misma manera, se puede extender a funciones de correlación de n puntos, $\langle A_1(t_1)A_2(t_2)\dots A_n(t_n) \rangle$, donde cada observable puede ser evaluado en las ramas de ida o de vuelta.

En nuestro caso, estaremos interesados en los correladores o funciones de correlación de n puntos de los objetos $q^\pm$ en el camino de integración de Schwinger-Keldysh, dado que nos permitirán obtener información acerca de la dinámica del sistema. Para obtener estos correladores definiremos un objeto importante, al que llamaremos funcional generador, que permitirá obtener estos correladores para distintos tiempos insertando los observables en los puntos correspondientes del contorno. Así, definimos el funcional generador como:

$$Z[J^+, J^-] = \frac{\int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- \rho(q^+(t_0), q^-(t_0)) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' (L(q^+, \dot{q}^+) + J^+(t')q^+(t') - L(q^-, \dot{q}^-) - J^-(t')q^-(t'))}}{\int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- \rho(q^+(t_0), q^-(t_0)) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' (L(q^+, \dot{q}^+) - L(q^-, \dot{q}^-))}} \quad (13)$$

donde hemos introducido fuentes auxiliares $J^\pm(t')$ tal que éstas sean funciones suficientemente regulares en el intervalo $[t_0, t]$. Notemos que cuando $J^+ = J^- = 0$ tenemos que numerador y denominador son iguales por lo que:

$$Z[0, 0] = 1 \quad (14)$$

Además, notemos que el factor en el denominador también es 1 ya que vemos que corresponde con el valor de expectación $\langle \mathbb{I} \rangle$, el cual corresponde a

$$\langle \mathbb{I} \rangle = \text{Tr}(U(t_0, t)\mathbb{I}U(t, t_0)\rho(t_0)) = \text{Tr}(\rho(t)) = 1 \quad (15)$$

por lo que en principio parece un factor irrelevante que podemos ignorar, pero por conveniencia lo mantendremos cuando sea necesario, y a veces lo omitiremos cuando no lo necesitemos.

2 Funciones de correlación desde el funcional generador

Estas fuentes que hemos introducido permitirán generar los correladores mediante derivadas funcional con respecto a $J^\pm$, y posteriormente se fijan a cero para recuperar los valores físicos de los observables. Para detalles matemáticos acerca de las derivadas funcionales ver Apéndice D. Entonces, tomaremos la derivada funcional del funcional generador Z respecto a $J^\pm(s)$ y obtenemos:

$$\frac{\delta Z[J^+, J^-]}{\delta J^\pm(s)} = \pm \frac{i \int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- \rho[q^+(t_0), q^-(t_0)] q^\pm(s) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' (L(q^+, \dot{q}^+) + J^+(t')q^+(t') - L(q^-, \dot{q}^-) - J^-(t')q^-(t'))}}{\int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- \rho[q^+(t_0), q^-(t_0)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' (L(q^+, \dot{q}^+) - L(q^-, \dot{q}^-))}} \quad (16)$$

Luego de tomar la derivada, si hacemos $J^+ = J^- = 0$, obtendremos que:

$$\frac{\delta Z[J^+, J^-]}{\delta J^\pm(s)} \Big|_{J^+ = J^- = 0} = \pm \frac{i}{\hbar} \langle q^\pm(s) \rangle \quad (17)$$

Hemos obtenido el valor promedio respecto al contorno de Schwinger-Keldysh de la variable $q^\pm$ en el tiempo s al derivar respecto a la fuente. El signo dependerá de si la fuente es respecto de la rama hacia adelante o hacia atrás, por lo que por cada derivada respecto a J^+ bajará un factor de $\frac{i}{\hbar}$, mientras que cada derivada respecto a J^- bajará un factor de $-\frac{i}{\hbar}$.

Con esto en consideración tomando una segunda derivada en Z y arreglando tenemos cuatro opciones posibles:

$$\langle q^+(t)q^+(t') \rangle = -\hbar^2 \frac{\delta^2 Z}{\delta J^+(t)\delta J^+(t')} \Big|_{J^+=J^-=0} \equiv i\hbar G^{++}(t, t') \quad (18)$$

$$\langle q^-(t)q^-(t') \rangle = -\hbar^2 \frac{\delta^2 Z}{\delta J^-(t)\delta J^-(t')} \Big|_{J^+=J^-=0} \equiv i\hbar G^{--}(t, t') \quad (19)$$

$$\langle q^+(t)q^-(t') \rangle = \hbar^2 \frac{\delta^2 Z}{\delta J^+(t)\delta J^-(t')} \Big|_{J^+=J^-=0} \equiv i\hbar G^{+-}(t, t') \quad (20)$$

$$\langle q^-(t)q^+(t') \rangle = \hbar^2 \frac{\delta^2 Z}{\delta J^-(t)\delta J^+(t')} \Big|_{J^+=J^-=0} \equiv i\hbar G^{-+}(t, t') \quad (21)$$

donde hemos definido como notación los objetos $G^{ab}(t, t')$ con $a, b = \{+, -\}$ y el factor $i\hbar$ lo insertamos por conveniencia posterior.

Podemos extraer ciertas propiedades de estos objetos notando que al tomar $J^+ = J^- = J$ en el funcional generador Z tendremos que:

$$Z[J, J] = \frac{\int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- \rho(q^+(t_0), q^-(t_0)) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' (L(q^+, \dot{q}^+) - L(q^-, \dot{q}^-) + J(t')(q^+(t') - q^-(t')))} \int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- \rho(q^+(t_0), q^-(t_0)) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' (L(q^+, \dot{q}^+) - L(q^-, \dot{q}^-))}} \quad (22)$$

Notamos que podemos absorber este objeto dentro del Lagrangiano de la forma:

$$\tilde{L} = L(q, \dot{q}) + Jq \quad (23)$$

así, el funcional generador es:

$$Z[J, J] = \frac{\int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- \rho(q^+(t_0), q^-(t_0)) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' (\tilde{L}(q^+, \dot{q}^+) - \tilde{L}(q^-, \dot{q}^-))}} \int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- \rho(q^+(t_0), q^-(t_0)) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' (L(q^+, \dot{q}^+) - L(q^-, \dot{q}^-))}} \quad (24)$$

Notamos que aunque los Lagrangianos en el numerador y denominador son distintos, en principio obedecen la misma estructura ambos, por lo que en forma general, ambos representan el valor de expectación $\langle \mathbb{I} \rangle$, el cual independiente de la forma del lagrangiano resulta ser 1. Por tanto:

$$Z[J, J] = 1 \quad (25)$$

A partir de esto, expandiremos $Z[J, J]$ en torno a $J=0$:

$$Z[J, J] = Z[0, 0] + \int dt \frac{\delta Z}{\delta J(t)} \Big|_{J=0} J(t) + \frac{1}{2} \int dt \int dt' \frac{\delta^2 Z}{\delta J(t)\delta J(t')} \Big|_{J=0} J(t)J(t') + \dots + \quad (26)$$

Dado que $Z[J, J] = Z[0, 0] = 1$, tenemos que $\frac{\delta Z}{\delta J(t)} \Big|_{J=0} = 0$ y $\frac{\delta^2 Z}{\delta J(t)\delta J(t')} \Big|_{J=0} = 0$. A partir de (22) podemos derivar respecto a J y con ello tenemos:

$$\frac{\delta Z}{\delta J(t)} \Big|_{J=0} = \frac{i}{\hbar} \langle q^+(t) - q^-(t) \rangle = 0 \quad (27)$$

Debido a la linealidad de la integración, podemos decir que:

$$\langle q^+(t) \rangle = \langle q^-(t) \rangle \quad (28)$$

Lo cual indica que el promedio de la variable q tanto en la rama de ida como en la de vuelta son iguales. También

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta J(t) \delta J(t')} \Big|_{J=0} = \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \langle (q^+(t) - q^-(t))(q^+(t') - q^-(t')) \rangle = 0 \quad (29)$$

El cual reordenando:

$$\langle q^+(t)q^+(t') \rangle - \langle q^-(t)q^+(t') \rangle - \langle q^+(t)q^-(t') \rangle + \langle q^-(t)q^-(t') \rangle = 0 \quad (30)$$

esto significa que

$$G^{++}(t, t') + G^{--}(t, t') = G^{+-}(t, t') + G^{-+}(t, t') \quad (31)$$

Tenemos que $G^{++}(t, t')$ ordena los pares cronológicamente en la rama de ida y $G^{--}(t, t')$ los ordena anti-cronológicamente en la rama de vuelta. La suma de ambos cubre todas las posibles permutaciones temporales de $q(t)$ y $q(t')$.

Por otro lado, $G^{+-}(t, t')$ coloca siempre el operador que va en la rama de ida al lado izquierdo, sin importar la relación entre los tiempos t y t' , mientras que $G^{-+}(t, t')$ hace lo contrario, poniendo siempre el de la rama de vuelta a la izquierda. Así, la suma de los dos también recorre todas las permutaciones posibles, pero con la regla de ordenamiento de contorno de Keldysh.

Además, la igualdad (31) muestra que los cuatro correladores no son independientes, asunto al que volveremos en breve.

Adicionalmente, a esta relación, es posible notar lo siguiente. Tomemos la transpuesta conjugada de $G^{++}(t, t')$:

$$(G^{++}(t, t'))^\dagger = \frac{i \int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- \rho^\dagger(q^+(t_0), q^-(t_0)) q^+(t') q^+(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' (L(q^+, \dot{q}^+) + J^+(t') q^+(t') - L(q^-, \dot{q}^-) - J^-(t') q^-(t'))}}{\int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- \rho^*(q^+(t_0), q^-(t_0)) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' (L(q^+, \dot{q}^+) - L(q^-, \dot{q}^-))}}$$

donde como q es tal que $q = q^*$, entonces el único efecto aquí es que en las exponenciales cambia i por $-i$. Luego realizamos el cambio $q^+ \leftrightarrow q^-$:

$$(G^{++}(t, t'))^\dagger = \frac{i \int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- \rho^\dagger(q^-(t_0), q^+(t_0)) q^-(t') q^-(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' (L(q^+, \dot{q}^+) + J^+(t') q^+(t') - L(q^-, \dot{q}^-) - J^-(t') q^-(t'))}}{\int \mathcal{D}q^+ \int \mathcal{D}q^- \rho^*(q^-(t_0), q^+(t_0)) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' (L(q^+, \dot{q}^+) - L(q^-, \dot{q}^-))}}$$

Dado que ρ es autoadjunta, al conjugar y trasponer, es decir, intercambiar los índices, recuperamos ρ , por lo tanto, tenemos que:

$$(G^{++}(t, t'))^\dagger = -G^{--}(t', t) \quad (32)$$

De igual manera, al realizar la misma operación sobre $G^{+-}(t, t')$:

$$(G^{+-}(t, t'))^\dagger = -G^{+-}(t', t) = -G^{-+}(t, t') \quad (33)$$

Es posible reescribir las expresiones de los G en términos sólo del objeto q , sin los superíndices $\pm$, ya que éstos sólo indican en que rama estamos evaluando los q . De esta manera, para G^{++} :

$$G^{++}(t, t') = -\frac{i}{\hbar} \langle q^+(t) q^+(t') \rangle = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}(\mathcal{T}(q(t) q(t')) \rho(t_0)) \quad (34)$$

donde recordamos que $\mathcal{T}$ es el operador de ordenamiento temporal, tal que:

$$\mathcal{T}(q(t)q(t')) = \theta(t - t')q(t)q(t') + \theta(t' - t)q(t')q(t) \quad (35)$$

así, siempre aparecerá ordenado de forma que el objeto con tiempo más tardío va a la izquierda.

Del mismo modo, para G^{--} se tendrá que

$$G^{--}(t, t') = -\frac{i}{\hbar} \langle q^-(t)q^-(t') \rangle = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}(\bar{\mathcal{T}}(q(t)q(t'))\rho(t_0)) \quad (36)$$

donde aquí $\bar{\mathcal{T}}$ corresponde al operador de ordenamiento anti-temporal, cuya expresión es:

$$\bar{\mathcal{T}}(q(t)q(t')) = \theta(t' - t)q(t)q(t') + \theta(t - t')q(t')q(t) \quad (37)$$

donde en este caso, el objeto con tiempo más temprano va a la izquierda, justamente lo contrario del operador de ordenamiento temporal $\mathcal{T}$.

Para los casos G^{+-} y G^{-+} se tendrá:

$$G^{+-}(t, t') = -\frac{i}{\hbar} \langle q^+(t)q^-(t') \rangle = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}(q(t')q(t)\rho(t_0)) \quad (38)$$

$$G^{-+}(t, t') = -\frac{i}{\hbar} \langle q^-(t)q^+(t') \rangle = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}(q(t)q(t')\rho(t_0)) \quad (39)$$

donde debido a la forma en que se recorre el contorno de Keldysh, desde t_0 hasta t_f y luego de vuelta a t_0 , en $G^{+-}(t, t')$ el operador evaluado en t corresponde a la rama de ida (q^+), mientras que el operador en t' perteneciente a la rama de vuelta (q^-), aparece primero en la traza tras reorganizar los propagadores. De manera análoga, en $G^{-+}(t, t')$ el operador evaluado en t' está en la rama de ida y el de t en la rama de vuelta, lo que se refleja en el orden de los operadores dentro de la traza.

Vemos que estas definiciones son consistentes, pues notamos que al sumar $G^{++}(t, t')$ y $G^{--}(t, t')$ tenemos

$$G^{++}(t, t') + G^{--}(t, t') = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}(((\theta(t - t') + \theta(t' - t))(q(t)q(t') + q(t')q(t)))\rho(t_0)) \quad (40)$$

Debido a las propiedades de la función Theta de Heaviside, $\theta(t - t') + \theta(t' - t) = 1$, por lo que

$$G^{++}(t, t') + G^{--}(t, t') = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}((q(t)q(t') + q(t')q(t))\rho(t_0)) = G^{-+}(t, t') + G^{+-}(t, t') \quad (41)$$

relación que habíamos encontrado en (31).