

Rotación de Keldysh y propiedades del propagador

En nuestro funcional generador realizaremos el siguiente cambio de variable, al que llamamos rotación de Keldysh:

$$q^{\text{cl}}(t) = \frac{1}{2}(q^+(t) + q^-(t)), q^q(t) = \frac{1}{2}(q^+(t) - q^-(t)) \quad (1)$$

El superíndice «cl» viene de «clásico» mientras que el «q» viene de «quantum». La razón detrás de estos nombres viene del hecho que en nuestro funcional generador las integrales funcionales en q^+ y q^- contienen algo del tipo $e^{\frac{i}{\hbar}(S[q^+] - S[q^-])}$, obviando el término asociado la matriz densidad inicial. En el límite $\hbar \rightarrow 0$, que consiste en el límite clásico, el factor $\frac{1}{\hbar}$ amplifica cualquier diferencia entre las acciones $S[q^+]$ y $S[q^-]$, de modo que el argumento de esta exponencial compleja variará muy rápidamente cuando cambia ligeramente $q^\pm$. Para que la integral no se anule por cancelaciones debidas a esas oscilaciones, debe satisfacerse que $S[q^+] - S[q^-] = 0$, lo que implica que ambas ramas coinciden:

$$q^+(t) = q^-(t) \quad (2)$$

En este caso, sólo sobrevive una trayectoria, la trayectoria clásica. En las nuevas variables, esto se traduce en que $q^{\text{cl}} = q^+ = q^-$ y $q^q = 0$. Entonces en el límite clásico, lo único que queda es q^{cl} , justificando el nombre de estas nuevas variables.

Debido a las relaciones encontradas respecto a la función de correlación de un punto, de forma general tendremos que

$$\langle q^{\text{cl}}(t) \rangle = \langle q^+(t) \rangle = \langle q^-(t) \rangle, \langle q^q(t) \rangle = 0 \quad (3)$$

Y recordemos que si podemos expresar el interior de la exponencial como un término cuadrático en q , entonces $\langle q^{\text{cl}}(t) \rangle = 0$.

Ahora calculemos las funciones de correlación de dos puntos de estas nuevas variables, es decir, $\langle q^{\text{cl}}(t)q^{\text{cl}}(t') \rangle$, $\langle q^{\text{cl}}(t)q^q(t') \rangle$, $\langle q^q(t)q^{\text{cl}}(t') \rangle$ y $\langle q^q(t)q^q(t') \rangle$. En cada una de ellas introducimos sus expresiones determinadas por la ecuación (1) y al desarrollar obtendremos que:

$$\langle q^{\text{cl}}(t)q^{\text{cl}}(t') \rangle = \frac{i\hbar}{4}(G^{++}(t, t') + G^{-+}(t, t') + G^{+-}(t, t') + G^{--}(t, t')) \quad (4)$$

$$\langle q^{\text{cl}}(t)q^q(t') \rangle = \frac{i\hbar}{4}(G^{++}(t, t') + G^{-+}(t, t') - G^{+-}(t, t') - G^{--}(t, t')) \quad (5)$$

$$\langle q^q(t)q^{\text{cl}}(t') \rangle = \frac{i\hbar}{4}(G^{++}(t, t') - G^{-+}(t, t') + G^{+-}(t, t') - G^{--}(t, t')) \quad (6)$$

$$\langle q^q(t)q^q(t') \rangle = \frac{i\hbar}{4}(G^{++}(t, t') - G^{-+}(t, t') - G^{+-}(t, t') + G^{--}(t, t')) \quad (7)$$

Usando la relación que habíamos encontrado para las cuatro componentes de propagador en cada una de ellas, tendremos que:

$$\langle q^{\text{cl}}(t)q^{\text{cl}}(t') \rangle = \frac{i\hbar}{2}(G^{-+}(t, t') + G^{+-}(t, t')) \equiv i\hbar G^K(t, t') \quad (8)$$

$$\langle q^{\text{cl}}(t)q^q(t') \rangle = \frac{i\hbar}{4}(G^{++}(t, t') + G^{-+}(t, t') - G^{+-}(t, t') - G^{--}(t, t')) \equiv i\hbar G^R(t, t') \quad (9)$$

$$\langle q^q(t)q^{\text{cl}}(t') \rangle = \frac{i\hbar}{4}(G^{++}(t, t') - G^{-+}(t, t') + G^{+-}(t, t') - G^{--}(t, t')) \equiv i\hbar G^A(t, t') \quad (10)$$

$$\langle q^q(t)q^q(t') \rangle = 0 \quad (11)$$

Donde aquí se hace evidente que existen sólo 3 componentes independientes del propagador, el cual en forma matricial escribimos como

$$\bar{G}(t, t') = \begin{pmatrix} G^K(t, t') & G^R(t, t') \\ G^A(t, t') & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

donde hemos colocado $\bar{G}$ para distinguir notacionalmente de G que es la construcción del propagador con los objetos G^{++} , G^{-+} , G^{+-} y G^{--} .

Vemos que la correlación entre dos variables q^q siempre será cero. Los superíndices R y A significan «retarded» y «advanced». La razón de la elección de estos nombres la analizaremos. Para ello, reescribiremos la expresión para G^R usando las expresiones de G^{++} , G^{-+} , G^{+-} y G^{--} en términos de la traza:

$$G^R(t, t') = \frac{i}{4\hbar} \text{Tr}((\theta(t' - t) - \theta(t - t') - 1)(q(t)q(t') - q(t')q(t))\rho(t_0)) \quad (13)$$

Si $t > t'$, entonces $\theta(t' - t) = 0$ y $\theta(t - t') = 1$, por lo tanto, al usar esto en el paréntesis, la expresión anterior queda $G^R(t, t') = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}([q(t), q(t')]\rho(t_0))$, donde dentro de la traza está el conmutador de los q . Por otra parte, si $t < t'$, entonces $\theta(t' - t) = 1$ y $\theta(t - t') = 0$, por lo que aquí $G^R(t, t') = 0$. Podemos sintetizar ambos resultados en:

$$G^R(t, t') = -\frac{i}{2\hbar} \theta(t - t') \text{Tr}([q(t), q(t')]\rho(t_0)) \quad (14)$$

Aquí vemos que G^R depende del conmutador, por lo que si la acción de medir la variable q en un tiempo t' y luego en un tiempo t no conmuta, hay una correlación temporal al hacer estas mediciones, es decir, la medición de $q(t')$ influirá en la medición de $q(t)$. Dado que G^R contiene un término $\theta(t - t')$ esta correlación es no nula únicamente cuando $t > t'$. Esto refleja que la medición en t' puede afectar a la medición posterior en t , pero no al revés, mostrando una estructura causal. Por esta razón se llama propagador retardado, pues codifica la dependencia temporal que sólo se da hacia adelante en el tiempo, es decir, las causas están antes del efecto.

Análogamente se tiene que para G^A se llega a:

$$G^A(t, t') = \frac{i}{2\hbar} \theta(t' - t) \text{Tr}([q(t), q(t')]\rho(t_0)) \quad (15)$$

donde aquí la correlación es no nula cuando $t < t'$, es decir, la medición en t afecta la medición anterior en t' . Aunque es contraintuitivo, esto sólo indica una propagación que avanza hacia el pasado en términos de orden temporal, la cual en efecto ocurre en este formalismo, donde en la rama de vuelta estamos evolucionando hacia tiempos menores. Por esta razón se le llama propagador avanzado.

Por otro lado el propagador G^K , donde la K es por «Keldysh», se escribió en términos de $G^{-+}(t, t')$ y $G^{+-}(t, t')$, así:

$$G^K(t, t') = -\frac{i}{2\hbar} \text{Tr}((q(t)q(t') + q(t')q(t))\rho(t_0)) \quad (16)$$

Vemos que en este caso no refleja una dirección temporal, sino que este correlador estará relacionado con la distribución de partículas del sistema como revisaremos más adelante.

Veamos qué sucede con estos correladores bajo conjugación, conociendo las propiedades de los $G^{\pm\pm}$. Al tomar la traspuesta conjugada de G^K en la ecuación (8) tenemos que:

$$(G^K(t, t'))^\dagger = -G^K(t', t) \quad (17)$$

Por lo que el propagador de Keldysh es anti-hermítico.

Al tomar la traspuesta conjugada de G^R en la ecuación (9) tenemos que:

$$(G^R(t, t'))^\dagger = G^A(t', t) \quad (18)$$

Ahora, sumemos G^R y G^A desde las ecuaciones (14) y (15):

$$G^R(t, t') + G^A(t, t') = \frac{i}{2\hbar}(\theta(t' - t) - \theta(t - t'))\text{Tr}([q(t), q(t')]\rho(t_0)) \quad (19)$$

Si $t > t'$, entonces sólo queda G^R , mientras que si $t < t'$ sólo queda G^A . Si $t = t'$, entonces, la suma de Theta de Heaviside es cero, por lo tanto, la suma de los propagadores avanzados y retardados en tiempos iguales siempre será cero:

$$G^R(t, t) + G^A(t, t) = 0 \quad (20)$$

Por otro lado, tomemos ahora la resta:

$$G^R(t, t') - G^A(t, t') = -\frac{i}{2\hbar}(\theta(t - t') + \theta(t' - t))\text{Tr}([q(t), q(t')]\rho(t_0))$$

notamos que para $t \neq t'$ se tendrá que

$$G^R(t, t') - G^A(t, t') = -\frac{i}{2\hbar}\text{Tr}([q(t), q(t')]\rho(t_0)) \quad (21)$$

A partir del propagador $\bar{G}$, podemos calcular su inversa $\bar{G}^{-1}$, ésta es tal que:

$$\int dt'' \begin{pmatrix} G^K(t, t'') & G^R(t, t'') \\ G^A(t, t'') & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(t'', t') & B(t'', t') \\ C(t'', t') & D(t'', t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(t - t') & 0 \\ 0 & \delta(t - t') \end{pmatrix} \quad (22)$$

De esta ecuación matricial:

$$\int dt'' (G^K(t, t'')A(t'', t') + G^R(t, t'')C(t'', t')) = \delta(t - t') \quad (23)$$

$$\int dt'' (G^K(t, t'')B(t'', t') + G^R(t, t'')D(t'', t')) = 0 \quad (24)$$

$$\int dt'' G^A(t, t'')A(t'', t') = 0 \quad (25)$$

$$\int dt'' G^A(t, t'')B(t'', t') = \delta(t - t') \quad (26)$$

Asumiendo que los elementos G^R , G^A y G^K son invertibles, de (25) tenemos que

$$A(t'', t') = 0 \quad (27)$$

y

$$B(t'', t') = (G^A)^{-1}(t'', t') \quad (28)$$

Usando (27) en (23) se obtiene que

$$C(t'', t') = (G^R)^{-1}(t'', t') \quad (29)$$

Y con (28) obtenemos que

$$\int dt'' G^R(t, t'') D(t'', t') = - \int dt'' G^K(t, t'') (G^A)^{-1}(t'', t') \quad (30)$$

Multiplicando a ambos lados por la izquierda por $(G^R)^{-1}(s, t)$ junto con integrar en t , y luego usamos que como asumimos G^R invertible, $\int dt (G^R)^{-1}(s, t) G^R(t, t'') = \delta(s - t'')$, tendremos que:

$$D(s, t') = - \int dt'' \int dt (G^R)^{-1}(s, t) G^K(t, t'') (G^A)^{-1}(t'', t') \quad (31)$$

De esta forma, el inverso del propagador es:

$$G^{-1}(t, t') = \begin{pmatrix} 0 & (G^A)^{-1}(t, t') \\ (G^R)^{-1}(t, t') & - \int ds \int ds' (G^R)^{-1}(t, s) G^K(s, s') (G^A)^{-1}(s', t') \end{pmatrix} \quad (32)$$

Con todo esto ahora volvamos al funcional generador. Usaremos nuestro ejemplo armónico para ver cómo opera todo esto en el caso que tenemos una forma cuadrática en la exponencial. Notemos que las transformaciones (1) pueden escribirse matricialmente como:

$$\bar{\mathbf{q}} = R \mathbf{q} \quad (33)$$

donde $\bar{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} q^{\text{cl}}(t) \\ q^q(t) \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q^+(t) \\ q^-(t) \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. La inversa de la matriz R es $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, y $R^T = R$, junto con $(R^{-1})^T = R^{-1}$. Además, el módulo de su determinante es 1, por lo que esta transformación no añade algo a la medida de integración. De este modo, en el funcional generador del ejemplo armónico tendremos que con este cambio de variable, que:

$$Z[\mathbf{J}] = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\mathbf{q}} e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' \bar{\mathbf{q}}^T(t') (R^{-1})^T G^{-1}(t', t'') R^{-1} \bar{\mathbf{q}}(t'') - \int_{t_0}^t dt' \mathbf{J}^T(t') R^{-1} \bar{\mathbf{q}}(t') \right)}}{\int \mathcal{D}\bar{\mathbf{q}} e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^t dt'' \bar{\mathbf{q}}^T(t') R^{-1} G^{-1}(t', t'') R^{-1} \bar{\mathbf{q}}(t'') \right)}} \quad (34)$$

con esto, definimos

$$\bar{\mathbf{J}} = R^{-1} \mathbf{J} \quad (35)$$

con $\bar{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} J^{\text{cl}}(t) \\ J^q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J^+(t) + J^-(t) \\ -J^+(t) - J^-(t) \end{pmatrix}$, y el producto matricial después de realizar las operaciones algebraicas puede ser escrito como:

$$\bar{G}^{-1}(t', t'') = R^{-1} G^{-1}(t', t'') R^{-1} = \bar{G}_{\text{dyn}}^{-1}(t', t'') + \bar{G}_{\text{ini}}^{-1}(t', t'') \quad (36)$$

donde

$$\bar{G}_{\text{dyn}}^{-1}(t', t'') = \begin{pmatrix} 0 & -2m \left(\frac{d^2}{dt'^2} + \omega^2 \right) \delta(t' - t'') \\ -2m \left(\frac{d^2}{dt''^2} + \omega^2 \right) \delta(t' - t'') & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

y

$$\bar{G}_{\text{ini}}^{-1}(t', t'') = \begin{pmatrix} D^{++} + D^{+-} + D^{-+} + D^{--} & D^{++} - D^{+-} + D^{-+} - D^{--} \\ D^{++} + D^{+-} - D^{-+} - D^{--} & D^{++} - D^{+-} - D^{-+} + D^{--} \end{pmatrix} \quad (38)$$

donde sólo por simplicidad notacional no hemos puesto $D^{\pm\pm}(t', t'')$ dentro de la matriz $\bar{G}_{\text{ini}}^{-1}(t', t'')$, sin embargo, esto llevan esta dependencia. Notamos que la parte dinámica que proviene del lagrangiano sólo entrega contribuciones a las entradas no diagonales de $\bar{G}^{-1}$, mientras que la parte que proviene de la matriz densidad inicial contendrá todas las entradas. Sin embargo, al comparar las ecuaciones (36) con (32), eso indica que la primera entrada en $\bar{G}_{\text{ini}}^{-1}$ es cero:

$$D^{++}(t, t') + D^{+-}(t, t') + D^{-+}(t, t') + D^{--}(t, t') = 0 \quad (39)$$

de forma que sólo hay tres componentes realmente independientes en la matriz densidad. Además, la componente diagonal no nula de $\bar{G}^{-1}$ sólo contiene información del estado inicial.

Así, reescribiremos la ecuación (38) de la forma:

$$\bar{G}_{\text{ini}}^{-1}(t', t'') = \begin{pmatrix} 0 & (G_{\text{ini}}^A)^{-1}(t', t'') \\ (G_{\text{ini}}^R)^{-1}(t', t'') & (G_{\text{ini}}^K)^{-1}(t', t'') \end{pmatrix} \quad (40)$$

donde, usando las definiciones de los $D^{\pm\pm}$ y (39), denotaremos por:

$$(G_{\text{ini}}^A)^{-1}(t', t'') = 2i\hbar(D_0^{++} + D_0^{-+})\delta(t' - t_0)\delta(t'' - t_0) \quad (41)$$

$$(G_{\text{ini}}^R)^{-1}(t', t'') = 2i\hbar(D_0^{++} + D_0^{+-})\delta(t' - t_0)\delta(t'' - t_0) \quad (42)$$

$$(G_{\text{ini}}^K)^{-1}(t', t'') = -2i\hbar(D_0^{+-} + D_0^{-+})\delta(t' - t_0)\delta(t'' - t_0) \quad (43)$$